

Cap. 2 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

aula 3

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.utl.pt)

Cap. 2 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

2.1. Otimização Combinatória - Introdução

2.2. Relaxações

Relaxação

Relaxação Linear

Relaxação Lagrangeana – Método de Subgradiente

2.3. Resolução exata de problemas

Branch and Bound

Planos de Corte

Aplicações

Análise de Investimentos

Uma companhia tem um orçamento de b u.m. para investimentos no próximo ano e identificou n projetos indivisíveis. Cada projeto j proporciona, uma receita de c_j e requer um investimento de a_j .

Formule o problema supondo que se pretende maximizar a receita total.

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \\ x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Problema da mochila

✓ O problema da mochila é NP-difícil.

Branch & Bound

- PLI de Minimização: $z^* = \text{Min}\{c x : x \in S\}$ ($S \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$)
- Pretendemos “partir” o problema inicial em problemas mais fáceis de resolver e que nos levem à resolução do problema inicial!
- Decompondo S em subconjuntos mais pequenos:

$$S = \bigcup_{k=1}^K S_k$$

e considerando $Z^k = \text{Min}\{c x : x \in S_k\}$

então, $Z^* = \min_k Z^k$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Bound

➤ PLI de Minimização: Cancelamento de ramificação a partir de um nó

P $27 = \bar{z}$
 $13 = \underline{z}$

Ramificação

P1 20
20

P2 25
15

P 27
13

Ramificação

P1 25
20

P2 18
13

i. SO do subproblema

ii. Subproblema de valor nunca melhor que o de P2

iii. Subproblema impossível!

➤ Obtenção dos limites para os valores de cada subproblema:

- Majorantes – SA primais
- Minorantes – relaxações; dualidade

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2015/16 53

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Bound

Questões:

- Como escolher os subconjuntos S_k ?
- Qual a regra de partição/ramificação?
- A partir de cada nó devemos dividir a resolução em dois ou mais nós?
- Por que ordem se devem analisar os subproblemas em estudo?
- Quais as regras para obtenção de limites?

Programação Binária:

P $x_k \in \{0, 1\}$

$x_k=0$ $x_k=1$

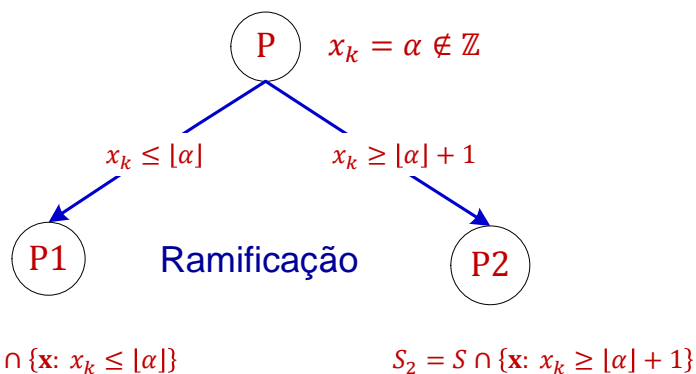
Ramificação

P1 **P2**

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2015/16 54

Branch & Bound

Programação Inteira:



Branch & Bound

➤ Graficamente - PLR

$$\text{Min } z = x_1 - 2x_2$$

s.a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Bound

➤ Graficamente - PLR

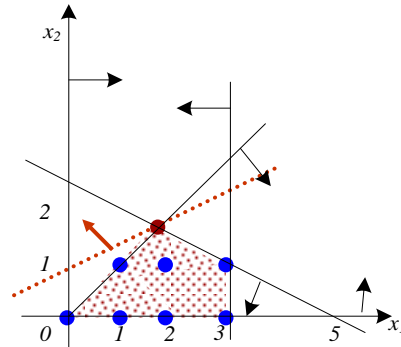
$$\text{Min } z = x_1 - 2x_2$$

s.a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_{RL} = (x_1^{RL}, x_2^{RL}) = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

$$\underline{z} = z_{RL} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = z(0,0)$$



OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Bound

$$\mathbf{x}_{RL} = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

$$\textcircled{P} \quad \underline{z} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \bar{z}$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Bound

$x_{RL} = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$$P \quad z = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \bar{z}$$

$$x_1 \leq 1 \quad x_1 \geq 2$$

Ramificação

$$P1 \quad P2$$

$Min z = x_1 - 2x_2$

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2015/16 59

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Bound

$$P \quad z = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \bar{z}$$

$$x_1 \leq 1 \quad x_1 \geq 2$$

Ramificação

$$P1 \quad P2$$

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2015/16 60

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Bound

$P \quad z = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \bar{z}$

$x_1 \leq 1 \quad x_1 \geq 2$

Ramificação

$P1$

$x = (1; 1)$
 $z_1 = -1$

SA! Fim \Rightarrow atualização do majorante:
 $\bar{z} = z_1 = -1$

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2015/16 61

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Bound

$P \quad z = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \bar{z}$

$x_1 \leq 1 \quad x_1 \geq 2$

Ramificação

$P1$

$P2$

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2015/16 62

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Bound

$P \quad z = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \bar{z}$

$x_1 \leq 1 \quad x_1 \geq 2$

Ramificação

$P_1 \quad P_2$

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

$z_2 = -1$

Fim \Rightarrow valor igual ao do majorante!

P_2

x_2

x_1

0 1 2 3 5

1 2

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2015/16 63

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Bound

0. Fazer: $P_0 \leftarrow PLR$; $S_0 \leftarrow S$; $ns \leftarrow 0$ {contador do número de subproblemas}
1. Resolver P_0
 - Se a SO de P_0 é admissível de PLI, **FIM** (é também SO de PLI)
 - c.c. criar a raiz da árvore com o subproblema P_0 e respetiva solução; $k \leftarrow 0$ {nº subproblema em análise}
2. **{Ramificação}** Ramificar P_k em dois subproblemas:
 - Seja $x_r = \alpha \notin \mathbb{Z}$. Incluir na árvore os dois novos subproblemas por resolver:

$$(P_{ns+1}) \quad z_{ns+1} = \text{Min}\{cx: x \in S_{ns+1}\} \quad \text{com } S_{ns+1} = S_k \cap \{x: x_r \leq [\alpha]\}$$

$$(P_{ns+2}) \quad z_{ns+2} = \text{Min}\{cx: x \in S_{ns+2}\} \quad \text{com } S_{ns+2} = S_k \cap \{x: x_r \geq [\alpha] + 1\}$$
 - Fazer $ns \leftarrow ns + 2$
3. Se existirem subproblemas por resolver: resolver um qualquer desses subproblemas, seja P_k , **Ir para 4**
 - c.c. **FIM** (SO: melhor SA encontrada)
4. **{Limitação}**
 - Se P_k é impossível **ou** tem valor ótimo $z_k \geq \bar{z}$ cancelar a pesquisa nesse ramo, **Ir para 3**
 - c.c., Se a SO de P_k for SA do PLI cancelar a pesquisa nesse ramo e **Ir para 5**
 - c.c. **Ir para 2**
5. Se $z_k < \bar{z}$ atualizar: $\bar{z} \leftarrow z_k$ e considerar a SO de P_k como melhor SA
6. Se $z = \bar{z}$ **FIM** (a S.O. é a solução com valor $z = \bar{z}$)
 - c.c. **Ir para 3**

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2015/16 64

Branch & Bound

Regras:

- Escolha da variável para a ramificação:
 - Variável de menor/menor índice
 - Variável mais fracionária:

Sendo $f_j = x_j - \lfloor x_j \rfloor$

escolher: $\arg \max_j \{\min(f_j, 1 - f_j)\}$
- Escolha do nodo para analisar (problema P_k):
 - *Depth-first*
 - Escolher o nó com o melhor valor de z_k (valor mais baixo)

Exercícios

8. Escrever o método de *branch and bound* (B&B) considerando o problema inicial de Maximização.
- Resolva os dois problemas seguintes, utilizando o B&B e considerando como regra para escolha da variável de ramificação:
- i. A variável mais fracionária.
 - ii. A variável diferente da escolhida em i. e de índice mais baixo possível.
9. $\text{Min } z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5$ 10. $\text{Max } z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5$
- s.a: $\begin{cases} x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -2 \\ 5x_1 - x_2 + x_5 \geq 7 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \text{ inteiros} \end{cases}$ s.a: $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 15 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 22 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 13 \\ x_j \in \mathbb{Z}_0^+ \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$
11. Formule e resolva recorrendo ao B&B o exercício 11.3-4 (pg. 525) do Hillier and Lieberman.

[Solver](#)